Vybrané kapitoly z urychlovačové fyziky

Z. Doležal[1]**,**

Text k přednášce Urychlovače nabitých částic
K dispozici na `http://ipnp.cz/dolezal/teach/accel`

4.1.2019

[1] Zdenek.Dolezal@mff.cuni.cz

Obsah

1 Základní pojmy **3**
1.1 Dynamika částice-svazek 3

2 Urychlování pomocí vysokofrekvenčních vlnovodů a rezonátorů **4**
2.1 Vysokofrekvenční vlnovody 4
2.2 Vlnovody s clonami 7
2.2.1 Přírůstek energie 8
2.2.2 Základní parametry vlnovodů 8

3 Betatron, betatronové kmity **10**
3.1 Pohyb nabité částice v magnetickém poli 10
3.2 Wideroeho podmínka 10
3.3 Slabá fokusace 11
3.4 Adiabatický útlum 13

4 Vedení svazků částic **14**
4.1 Fokusace svazku 14
4.1.1 Multipóly - profily pole a pólů 15
4.1.2 Pohybové rovnice 19
4.2 Betatronové funkce 19

5 Podélný pohyb částic **22**
5.1 Podmínka synchronnosti 22
5.2 Fázová stabilita 26

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Dynamika částice-svazek

Na částici s nábojem q v elektrickém a magnetickém poli působí tzv. Lorentzova síla

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického pole, $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukce, $\boldsymbol{v}$ je rychlost částice.

Integrál Lorentzovy síly za čas udává přírůstek hybnosti částice

$$\Delta\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

zatímco integrál přes dráhu je zase přírůstek energie:

$$\Delta E_{kin} = \int \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.3}$$

Dráhový element si můžeme vyjádřit i pomocí časového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ a pak je přírůstek energie

$$\Delta E_{kin} = q\int \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + q\int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

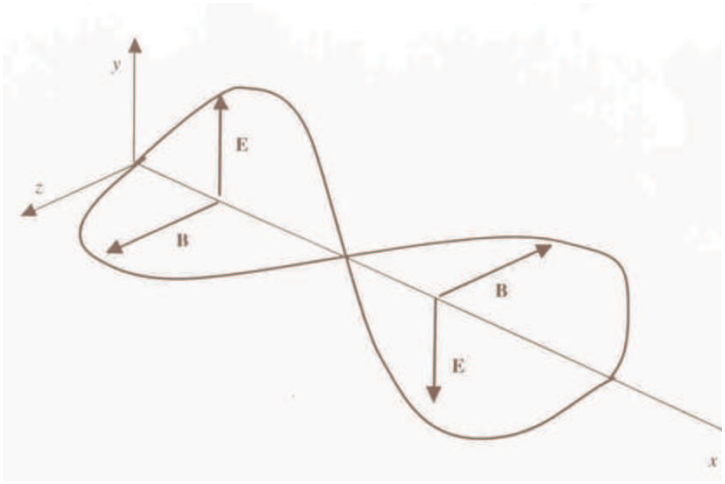
Ze vztahu vidíme, že kinetická energie částice roste, nachází-li se částice v elektrickém poli. Urychlování probíhá ve směru pole, je nezávislé na rychlosti částice, a proto k němu dochází i při nulové rychlosti. Druhá složka Lorentzovy síly naopak na rychlosti závisí, a z předchozího vztahu je zřejmé, že se na urychlování nijak nepodílí: součin $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{v}$ je z definice nulový.

Kapitola 2

Urychlování pomocí vysokofrekvenčních vlnovodů a rezonátorů

2.1 Vysokofrekvenční vlnovody

Bylo by ideální, kdybychom k urychlování částic mohli použít vlnění, volně se šířící v prostoru. Bohužel to ale nejde - základní poučky nám říkají, že volné EM vlny mají pouze příčné složky pole. Tuto situaci znázorňuje obrázek 2.1. Abychom získali vlnění s podélnou elektrickou komponentou, potřebnou pro urychlování, musíme vlny nechat procházet prostředím s takovými hraničními podmínkami, které modifikují vlnění a umožňují mu získat požadované podélné složky. Budeme tedy studovat vlastnosti vlnění



Obrázek 2.1: Rovinná vlna ve volném prostoru

šířícího se válcovým nebo pravoúhlým vlnovodem. Vlnová rovnice pro tento případ je Laplaceova rovnice

$$\nabla^2 E_s + \frac{\omega^2}{c^2} E_s = 0 \tag{2.1}$$

s řešením

$$E_s = E_{0s} e^{i(wt-ks)} \tag{2.2}$$

Podobné řešení platí i pro azimutální složku.

Rozdělíme si Laplaceův operátor na podélnou a příčnou složku. Využijeme přitom, že $\partial^2/\partial s^2 = -k^2$:

$$\nabla_\perp^2 E_s + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_s = 0 \tag{2.3}$$

K popisu šíření vlnění ve válcových vlnovodech se nejlépe hodí válcová souřadnicová soustava (r, θ, s). Uvažujeme, že azimutální závislost je periodická s periodicitou n a lze ji vyjádřit například

$$E \propto \sin n\theta \tag{2.4}$$

Druhá derivace je pak $\partial^2/\partial\theta^2 = -n^2$. Laplaceovu rovnici pak dostaneme ve tvaru

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_s}{\partial r} + (k_c^2 - \frac{n^2}{r^2})E_s = 0 \tag{2.5}$$

kde k_c je *cut-off vlnové číslo* definované jako

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{2.6}$$

Jde o Besselovu diferenciální rovnici a lze ji řešit pomocí Besselových a Neumannových funkcí ve formě

$$E_s = AJ_n(k_c r) + BN_n(k_c r) \tag{2.7}$$

Neumannovy funkce mají singularitu v nule, proto koeficient B musí být roven nule. První člen představuje mnoho modů n pro složku pole E_s, která je v souladu s okrajovými podmínkami. Příčné složky vykazují podobnou multimodovou strukturu.

Možné mody se klasifikují do dvou základních skupin: mody TE (příčné elektrické) a TM (příčné magnetické), kde všechny příčné složky jsou pouze magnetické. Právě tyto mody nás nadále budou zajímat, a to díky přítomnosti nenulových podélných elektrických komponent. Jednotlivé TM mody jsou popsány pomocí 3 indexů TM_{npq}, kde n,p a q jsou azimutální, radiální a podélná periodicita. Například TM_{010} označuje vlnu, která nemá azimutální ani podélnou periodicitu, avšak vykazuje jeden uzel v radiálním směru - na stěně vlnovodu, kde elektrické pole musí být nulové.

Jaké okrajové podmínky tedy musí platit ve válcovém rezonátoru délky l a poloměru a? Nejdůležitější podmínkou je nulová velikost všech elektrických složek rovnoběžných s kovovým povrchem. Lze je tedy vyjádřit vztahy:

$$\begin{aligned} &E_s = E_\theta = 0 \quad \text{pro} \quad r = a, \quad \text{a} \\ &E_r = E_\theta = 0 \quad \text{pro} \quad s = 0 \quad \text{a} \quad s = l \end{aligned} \tag{2.8}$$

Řešení rovnice (2.5) pro $n = 0$ splňující tyto okrajové podmínky je:

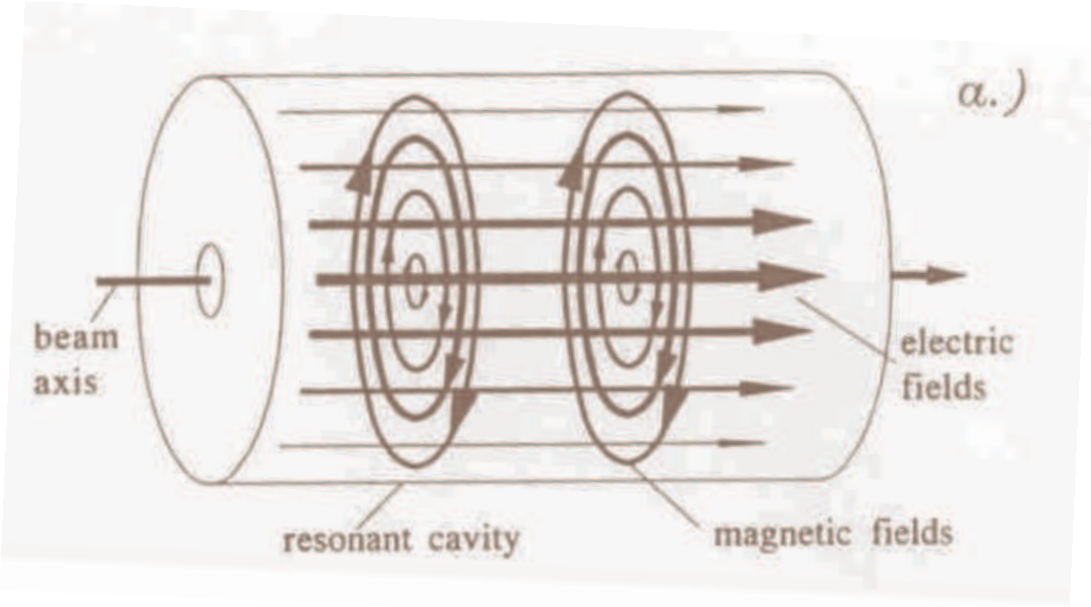
$$\begin{aligned} E_s &= E_0 J_0(k_c r) \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - ks)}, \\ E_\theta &= 0, \\ E_r &= -i\frac{k}{k_c} E_0 J_0'(k_c r) \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - ks)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jediná nenulová složka magnetické indukce bude

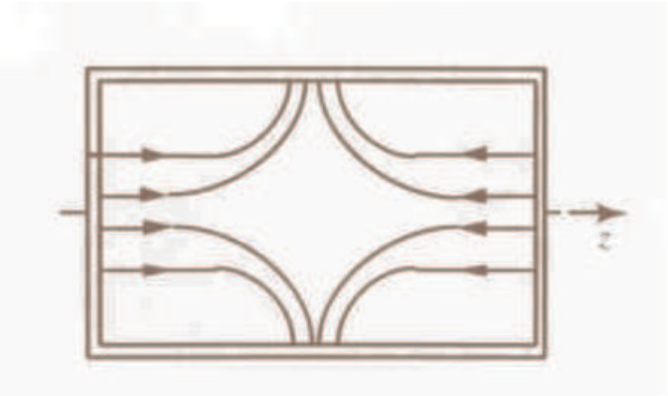
$$H_\theta = -i\frac{\omega}{c k_c} E_0 J_0'(k_c r) \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - ks)} \tag{2.10}$$

Když nyní uplatníme okrajovou podmínku na podélnou složku intenzity elektrického pole, dojdeme ke vztahu $J_0(k_c a) = 0$. Ze znalosti prvního uzlu Besselovy funkce J_0 dostaneme

$$k_c \cdot a = 2.405 \tag{2.11}$$



Obrázek 2.2: Tvar pole pro mód TM_{010}



Obrázek 2.3: Tvar pole pro mód TM_{011}

Výsledné tvary pole pro módy TM_{010} a TM_{011} jsou vidět na obrázcích 2.2 a 2.3. Z nich (a z rovnice 2.9) je patrné, že v tomto módu existuje podélná složka urychlujícího pole, která je největší v ose rezonátoru, a klesá směrem ke stěnám vlnovodu. Pole je nezávislé na θ (což lze pro $n = 0$ očekávat) i na s.

Chceme-li z(2.3) získat postupnou vlnu a nikoli tlumené vlnění, musí být koeficient u E_s kladný. Platí tedy

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0 \tag{2.12}$$

Z rovnice(2.2) vidíme, že má-li se vlna šířit v kladném směru osy s, musí být $k > 0$ tj. $\omega/c > k_c$ a můžeme si definovat cutoff frekvenci

$$\omega_c = ck_c = c\frac{2.405}{a} \tag{2.13}$$

která nám udává nejnižší frekvenci vlny, která se může ještě vlnovodem šířit. Její propagační faktor je pak

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \tag{2.14}$$

Cutoff frekvence je určena průměrem trubice (nejdelší vlna, která se ještě vlnovodem může šířit má délku menší než průměr).

Odvození fázové rychlosti je jednoduché - stačí požadovat, aby fáze vlny $\psi = \omega t - ks$ byla konstantní, a z požadavku její nulové derivace získat fázovou rychlost:

$$\dot{\psi} = \omega - k\dot{s} = 0 \tag{2.15}$$

$$v_{\mathrm{ph}} = \dot{s} = \frac{\omega}{k} \tag{2.16}$$

Po dosazení(2.14) do předchozí rovnice dostaneme pro fázovou rychlost hodnotu převyšující rychlost světla

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} > c \tag{2.17}$$

Takže pomocí válcového vlnovodu sice dokážeme získat pole s požadovaným směrem urychlující složky, avšak toto pole se stále ještě k urychlování nehodí - jeho rychlost je větší než nejvyšší dosažitelná rychlost částic, a proto čisté urychlení bude nulové. Proto musíme náš vlnovod ještě modifikovat. Ještě jsme si neurčili jednu veličinu, kterou charakterizujeme vlnění: *grupovou rychlost*. Ta je definována

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{2.18}$$

Derivací vztahu(2.12) podle k dostaneme

$$k = \frac{\omega}{c^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{2.19}$$

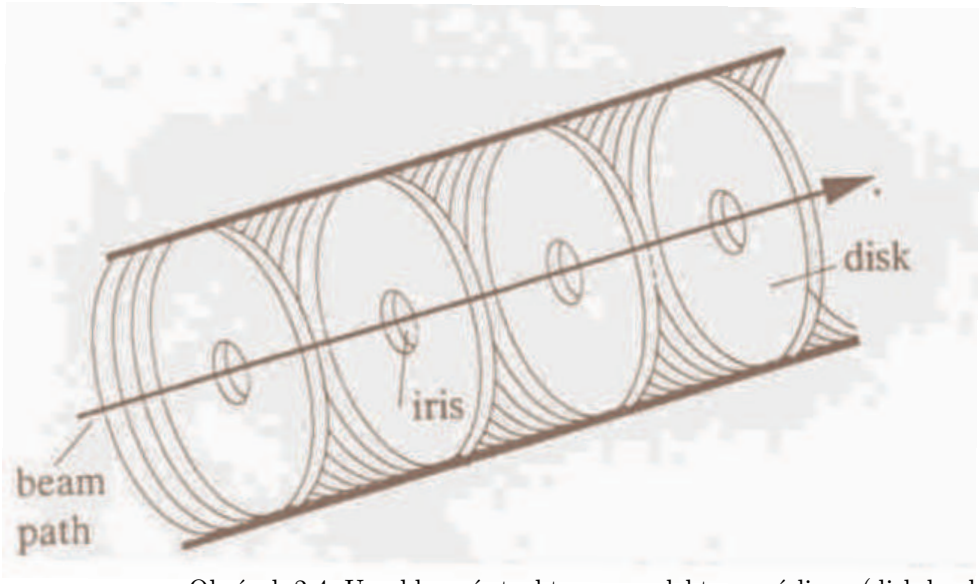
S použitím $k = \omega/v_{\mathrm{ph}}$ získáme vztah pro grupovou rychlost, která je menší než rychlost světla:

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2 k}{\omega} = c \cdot \frac{c}{v_{\mathrm{ph}}} < c \tag{2.20}$$

protože $v_{\mathrm{ph}} > c$

2.2 Vlnovody s clonami

Pro dosažení co nejúčinnějšího urychlování je žádoucí, aby se fázová rychlost urychlujícího vlnění rovnala rychlosti částice. Vlnovod, popisovaný v předchozí části je tedy třeba modifikovat, aby tuto podmínku splňoval. To lze provést tak, že se vlnovod 'zatíží' vloženými kovovými strukturami - například kruhovými přepážkami. Tato struktura se nazývá *disk loaded waveguide* a je tvořena rovnoměrně rozloženými clonami (s otvory uvnitř) umístěnými kolmo na osu vlnovodu, jak znázorňuje obrázek 2.4 Tato struktura je vhodná pro urychlení elektronů, které dosáhnou velmi brzy rychlosti blízkých rychlosti světla. Pro urychlování protonů se používají jiné tvary rezonátorů, které reflektují změny ve frekvenci a rychlosti částice.



Obrázek 2.4: Urychlovací struktura pro elektronový linac (disk-loaded)

2.2.1 Přírůstek energie

Abychom dokázali určit přírůstek energie (*energy gain*), musíme vzít v úvahu že elektrické pole se během průletu částice vlnovodem mění. Přírustek energie je tudíž také oscilující veličinou

$$eV(t) = e\hat{V}\cos\omega t = e\hat{V}\cos\omega\frac{s}{v} \tag{2.21}$$

kde jsme zanedbali změnu rychlosti částice při průchodu vlnovodem. Přírůstek energie po průletu rezonátorem o délce l_c tedy bude

$$\Delta E_{kin} = \int_{-1/2l_c}^{1/2l_c} \frac{e\hat{V}_0}{l_c}\cos(\omega\frac{s}{v})ds \tag{2.22}$$

po integraci přes rezonátor délky $l_c = \lambda_{rf}/2$ máme

$$\Delta E_{kin} = e\hat{V}_0\frac{\sin(\frac{\omega\lambda_{rf}}{4v})}{(\frac{\omega\lambda_{rf}}{4v})} \tag{2.23}$$

kde faktor

$$T_t = \frac{\sin(\frac{\omega\lambda_{rf}}{4v})}{(\frac{\omega\lambda_{rf}}{4v})} \tag{2.24}$$

se nazývá *transit time factor*. Pro malé energie je tento faktor, a tím i přírůstek energie malý nebo dokonce záporný, ale v blízkosti rychlosti světla se jeho hodnota blíží k jedničce.

2.2.2 Základní parametry vlnovodů

V této části si uvedeme některé vztahy charakterizující vlnovody. V každém vlnovodu platí zákon zachování energie, který má pro vlnovod tvar

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial s} + P_w + nevE_s = 0 \tag{2.25}$$

Zde W je energie uložená v jednotkové délce svazku, P je energetický tok ve směru s, P_w jsou ztráty v jednotkové délce stěny vlnovodu, a $nevE_s$ je energie předaná n částicím s nábojem e o rychlosti v v elektrickém poli E_s. Ztráty ve stěnách jsou svázány s tzv. *faktorem kvality* Q

$$Q = \frac{\omega W}{P_w} \tag{2.26}$$

a P_w/ω jsou energetické ztráty na jednotkovou délku a radián kmitů pole.

Další charakteristickou vlastností vlnovodů je *koeficient útlumu (attenuation)*

$$2\alpha = \frac{\omega}{v_g Q} \tag{2.27}$$

Tento koeficient charakterizuje útlum energetického toku podél délky rezonátoru (díky ztrátám na stěnách):

$$P = P_0 e^{-2\alpha s} \tag{2.28}$$

Kapitola 3

Betatron, betatronové kmity

3.1 Pohyb nabité částice v magnetickém poli

Nabitá částice se v magnetickém poli pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je dán rovností Lorentzovy a odstředivé síly. V případě pohybu v rovině kolmé na směr magetického pole je tato rovnost vyjádřena

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \tag{3.1}$$

Poloměr je pak

$$r = \frac{p}{qB} \tag{3.2}$$

Svazky často charakterizujeme pomocí tzv. tuhosti svazku (beam rigidity), která je definovaná

$$Br = \frac{p}{q} \tag{3.3}$$

Při vyšších energiích je praktické nahradit hybnost celkovou energií, takže tuhost svazku je pak

$$Br = \frac{\beta E}{qc} \tag{3.4}$$

V praktických jednotkách a v případě částice s jednotkovým nábojem platí

$$B[\mathrm{T}]r[\mathrm{m}] = \frac{10}{3}\beta E[\mathrm{GeV}] \tag{3.5}$$

3.2 Wideroeho podmínka

Betatron se od ostatních cyklických urychlovačů liší v jedné zásadní věci: magnetické pole zde neslouží jen k ohybu částic a jejich udržení na kruhové dráze, ale současně i k urychlování (u rezonančních urychlovačů je k tomuto účelu použito elektrického pole v rezonátorech). Příprava pole, které by současně urychlovalo a udrželo svazek na patřičné dráze je možná - to už ukázal Wideroe v roce 1928. Zopakujeme zde jeho postup.

Poloměr dráhy částice s nábojem q pohybující se rychlostí v v magnetickém poli je dán rovností dostředivé a Lorentzovy síly:

$$\frac{\gamma mv^2}{r} = qvB_\perp \tag{3.6}$$

kde $B_\perp$ je průmět vektoru magnetické indukce do směru kolmého k rovině pohybu částice. Hybnost lze vyjádřit jako

$$p = \gamma mv = qB_\perp r \tag{3.7}$$

Urychlující síla musí být rovna časové derivaci hybnosti:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}B_\perp + r\frac{\mathrm{d}B_\perp}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.8}$$

Dále se omezíme na dráhu s konstantním poloměrem $r = R$ (usnadní nám to nejen odvozování, ale i konstrukci vakuové komory), takže první člen v závorce bude nulový a síla bude:

$$F = qR\frac{\mathrm{d}B(R)}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

Zde předpokládáme axiální symetrii pole, tj. velikost indukce bude po obvodu stejná. Zvyšující se magnetické pole bude udržovat na poloměru R částici, jejíž hybnost se bude měnit podle vztahu 3.9. Proměnné magnetické pole generuje elektromotorickou sílu která je v případě betatronu jedinou elektrickou silou využitelnou k urychlování. Tuto sílu vyjádříme pomocí azimutální složky intenzity elektrického pole E_φ

$$F = qE_\varphi \tag{3.10}$$

Z obou rovnic získáme požadovanou velikost E_φ:

$$E_\varphi = R\frac{\mathrm{d}B(R)}{\mathrm{d}t} \tag{3.11}$$

Urychlující pole určíme tak, že použijeme integrální tvar Maxwelovy rovnice

$$\oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3.12}$$

kde $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\mathrm{d}S$ je magnetický tok protékající uzavřenou integrační dráhou (dráha svazku).

Opět využijeme, že magnetické pole je rotačně symetrické. V tomto případě lze levou stranu předchozího vztahu vyjádřit jako

$$\oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int E_\varphi R\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi\,R\,E_\varphi \tag{3.13}$$

Indukované azimutální elektrické pole je pro kladné pole záporné.

Kombinaccí předchozích tří vztahů dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2\pi\,R^2\frac{\mathrm{d}B(R)}{\mathrm{d}t} \tag{3.14}$$

Celkový tok uzavřený dráhou částice je možné vyjádřit pomocí střední hodnoty magnetické indukce pole uvnitř dráhy jako $\Phi = \pi R^2\bar{B}(R)$. Časová derivace pole magnetického toku pak bude

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi\,R^2\frac{\mathrm{d}\bar{B}(R)}{\mathrm{d}t} \tag{3.15}$$

Porovnáním předchozích dvou vztahů a integrací s počáteční podmínkou $\bar{B}(R)_{t=0} = B(R)_{t=0} = 0$ dostáváme tzv. Wideroeho podmínku $\frac{1}{2}$

$$B(R) = \frac{1}{2}\bar{B}(R) \tag{3.16}$$

3.3 Slabá fokusace

Wideroeho podmínka je sice nutná, ale nikoli postačující pro získání stabilního svazku. Nezajišťuje totiž nijak stabilizaci svazku, tj. to, aby částice, která se vychýlí od ideální dráhy měla tendenci se na dráhu vrátit. Bez stabilizace by se například částice, jejíž dráha by na začátku urychlování byla mírně nakloněná, pohybovala po spirále dokud by nenarazila na stěnu urychlovací trubice. Při odvození podmínek stability pro svazek si musíme uvědomit, že Wideroeho podmínka musí platit jen pro ideální dráhu. Pro každou

jinou polohu není dostředivá síla rovná Lorentzově, takže na částici působí jejich rozdíl. Ve vodorovném směru bude

$$F_x = \frac{\gamma m v^2}{r} - qvB_y \tag{3.17}$$

Budeme zde používat kartézskou souřadnicovou soustavu pevně spojenou s částicí obíhající po kruhové dráze. $\boldsymbol{x}$ míří radiálně(v našem případě vodorovně), $\boldsymbol{y}$ axiálně (v našem případě svisle). V případě homogenního magnetického pole bude rozdíl sil z rovnice 3.17 nulový pro jakoukoliv dráhu. K dosažení fokusujícího účinku se pole musí měnit. Předpokládejme, že pole má slabý gradient. V okolí stabilní dráhy s poloměrem R lze magnetickou indukci vyjádřit pomocí gradientu jako

$$B_y = B_{0y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} x = B_{0y}\left(1 + \frac{R}{B_{0y}}\frac{\partial B_y}{\partial x}\frac{x}{R}\right) \tag{3.18}$$

kde $r = R + x = R(1 + x/R)$. Po dosazení do 3.17 bude síla působící na částici v aproximaci $x << R$

$$F_x \approx \frac{\gamma m v^2}{R}\left(1 - \frac{x}{R}\right) - qvB_{0y}\left(1 + \frac{R}{B_{0y}}\frac{\partial B_y}{\partial x}\frac{x}{R}\right) \tag{3.19}$$

Využijeme skutečnosti, že na ideální dráze $r = R$ je výsledná síla rovna nule a proto $\frac{\gamma m v^2}{R} = qvB_{0y}$. Dále si zavedeme tzv. index pole

$$n = -\frac{R}{B_{0y}}\frac{\partial B_y}{\partial x} \tag{3.20}$$

Po úpravě

$$F_x = -\frac{\gamma m v^2}{R}\frac{x}{R}(1 - n) \tag{3.21}$$

Pohybová rovnice ve směru x pro částici na níž působí síla proti směru výchylky úměrná výchylce $F = \gamma m\ddot{x}$ je

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \tag{3.22}$$

To je rovnice harmonického oscilátoru o kruhové frekvenci

$$\omega_x = \frac{v}{R}\sqrt{1 - n} = \omega_0\sqrt{1 - n} \tag{3.23}$$

kde ω_0 je frekvence oběhu po dráze. Částice tedy vykonává kmity ve vodorovném směru okolo ideální kruhové dráhy s frekvencí ω_x. Amplituda těchto kmitů v bodě o podélné souřadnici s je $x(s)$.

Tyto kmity se vyskytují ve všech kruhových urychlovačích, ale protože byly poprvé popsány v betatronech, označují se *betatronové kmity*.

Z předchozího vztahu je zřejmé, že aby byly kmity harmonické, musí být jejich frekvence reálná. Podmínka stability horizontálních betatronových kmitů je tedy

$$n < 1 \tag{3.24}$$

Naše úvahy doplníme ještě o pohyb v axiálním směru. Aby na částice působila svislá síla, musí existovat nenulová složka pole ve vodorovném směru B_x. Analogicky k předchozím vztahům bude pohybová rovnice

$$\gamma m\ddot{y} = qvB_x \tag{3.25}$$

Vztah mezi jednotlivými složkami vektoru magnetické indukce získáme z Maxwellovy rovnice

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \tag{3.26}$$

Po integraci a úpravách (pomocí 3.18 a 3.20) dostáváme

$$B_x = \int \frac{\partial B_y}{\partial x}\mathrm{d}y = -\int n\frac{B_{0y}}{R}\mathrm{d}y = -n\frac{B_{0y}}{R}y \tag{3.27}$$

Pohybová rovnice pro svislý pohyb bude

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \tag{3.28}$$

Částice tedy vykonává betatronové kmity ve svislém směru s frekvencí $\omega_y = \omega_0\sqrt{n}$. Pro harmonický pohyb tentokrát musí platit

$$n > 0 \tag{3.29}$$

Z předchozích vztahů vyplývá, že magnetické pole měnící se s polohou může zajistit stabilizaci dráhy částice, a že index pole musí splňovat tzv. *Steenbeckovo kritérium stability*

$$0 < n < 1 \tag{3.30}$$

3.4 Adiabatický útlum

V předcházejícím oddílu jsme při našich úvahách zcela ignorovali fakt, že částice se při svém pohybu urychluje. Pokusme se teď zjistit, jak to změní popis dynamiky svazku. Budeme uvažovat elektrické a magnetické pole $\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$ a $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, 0)$. Zajímá nás rovnice pohybu ve svislém směru. Odvodíme ji z Lorentzovy síly

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m\dot{y}) = qv_s B_x \tag{3.31}$$

Po derivaci dostáváme pohybovou rovnici pro rovnovážnou dráhu

$$\gamma mc^2\ddot{y} + \ddot{\gamma}mc^2\dot{y} = ec\omega_0 R B_x(R) \tag{3.32}$$

Dosazením ze vztahu (3.27) dostáváme po úpravách pohybovou rovnici ve svislém směru v urychlujícím elektrickém a magnetickém poli

$$\ddot{y} + \frac{\dot{E}}{E}\dot{y} + n\omega_0^2 y = 0 \tag{3.33}$$

Jde o rovnici tlumeného harmonického oscilátoru s řešením

$$y = y_0\,\mathrm{e}^{-\alpha_y t}\cos\omega t \tag{3.34}$$

Zde $\omega \approx \omega_0\sqrt{n}$ a dekrement útlumu je

$$\alpha_y = \frac{1}{2}\frac{\dot{E}}{E} \tag{3.35}$$

Pro technicky dosažitelné urychlovací gradienty je poměr $\dot{E}/E$ malý. Tlumící čas $\tau_y = 1/\alpha_y$ je mnohem větší než perioda kmitů, a proto můžeme útlum považovat za konstantní. Obálka kmitů (závislost amplitudy na čase) bude

$$y_{\max} = y_0\,\mathrm{e}^{-\alpha_y t} \tag{3.36}$$

Změna amplitudy je

$$\mathrm{d}y_{\max} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{E}}{E}y_{\max}\mathrm{d}t \tag{3.37}$$

Po integraci

$$\frac{y_{\max}}{y_{0,\max}} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} \tag{3.38}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že amplituda betatronových kmitů se zmenšuje se zvyšující se energií částice. Tento jev se nazývá *adiabatický útlum.*

Analogickými úvahami lze odvodit i stejný vztah pro vodorovnou fokusaci. Příčné rozměry svazku se tedy zmenšují úměrně odmocnině z energie. Stejně se musí zmenšovat i úhlová divergence y'. Emitance svazku ϵ (definovaná přibližně jako součin $y_{\max}y'_{\max}$ bude pak úměrná

$$\epsilon \approx \frac{1}{E} \tag{3.39}$$

Kapitola 4

Vedení svazků částic

4.1 Fokusace svazku

Podobně jako v optice se v urychlovačové fyzice používají pojmy jako ohnisko, ohnisková vzdálenost, ap. Abychom získali analogii spojné čočky, musí magnetické pole ohýbat svazek o úhel úměrný jeho vzdálenosti od osy, a opačného znaménka (viz obrázek 4.1)

$$\alpha = -\frac{r}{f} \tag{4.1}$$

Jak to udělat? Prostudujme situaci nejdříve v rovině xs (vodorovné výchylky). Požadujeme, aby $\alpha = -x/f$. Svazek je po průchodu magnetem délky l odkloněn o

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{l}{2\rho} \tag{4.2}$$

kde $\rho = p/eB_y$ je poloměr dráhy částice o hybnosti p v magnetickém poli s indukcí B_y. Je-li délka magnetu výrazně menší než poloměr dráhy, lze sinus nahradit jeho argumentem a pro změnu směru platí

$$\alpha = -\frac{l}{\rho} = -\frac{eB_y l}{p} \tag{4.3}$$

Z požadavku $\alpha = -x/f$ dostáváme podmínku pro závislost indukce na poloze

$$B_y = -gx \tag{4.4}$$

kde g (gradient pole) musí být konstantní. Při zobecnění do prostoru využijeme válcových souřadnic, a dostáváme požadavek použít azimutální pole $B_\varphi = -gr$. Částice se odkloní o úhel

$$\alpha = -\frac{e}{p} grl \tag{4.5}$$

Definujme si fokusační schopnost

$$k = \frac{e}{p} g = \frac{ec}{\beta E} g \tag{4.6}$$

a s její pomocí úhel ohybu

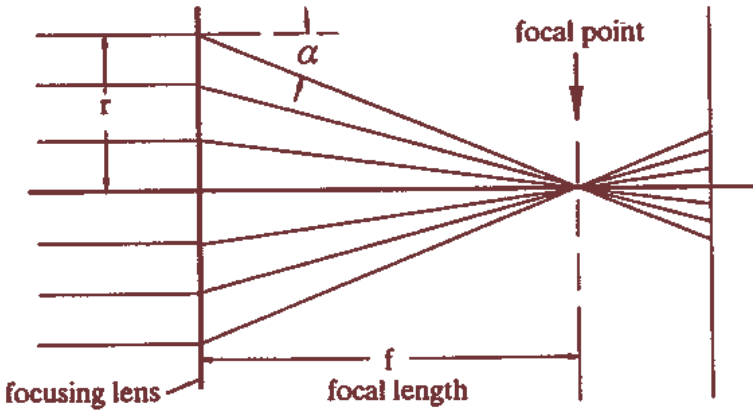
$$\alpha = -krl \tag{4.7}$$

a ohniskovou vzdálenost

$$\frac{1}{f} = kl \tag{4.8}$$

V praktických jednotkách platí

$$k[m^{-2}] = 0.3 \frac{g[\mathrm{T/m}]}{\beta E[\mathrm{GeV}]} \tag{4.9}$$



Obrázek 4.1: Schéma fokusace

Problémem je praktická realizace takového pole. Teoreticky lze použít různých drátěných konstrukcí vhodného tvaru, jimiž protéká elektrický proud. Ty ale vadí prolétávajícímu svazku. Další možností je parabolická proudová čočka (viz obrázek 4.2). Jde o 2 paraboloidy (rotačně symetrické okolo osy svazku) spojené v jednom bodě. Magnetická indukce klesá nepřímo úměrně s poloměrem, ale délka dráhy v magnetu zase roste s druhou mocninou, takže výsledek je

$$\alpha \propto B_\varphi l \propto \frac{1}{r} r^2 \propto r \tag{4.10}$$

I zde ale nastává nežádoucí rozptyl na materiálu paraboloidů. Požadavek nulové hmoty ve svazku splňuje *kvadrupólový magnet* - viz obrázek 4.3. Jeho pole je definováno pomocí skalárního potenciálu

$$V = -gxy \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = B_x = -gy \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = B_y = -gx \tag{4.13}$$

Jak působí na prolétající částice? Částice se souřadnicí $x \neq 0$ navede na směr k rovnovážné dráze. Ovšem částice vychýlené svisle ($y \neq 0$) naopak vychýlí ještě více od svazku. Znamená to tedy, že kvadrupól v jedné rovině fokusuje a ve druhé defokusuje.

Kombinací kvadrupólů pak dostaneme požadovaný magnet fokusující v obou rovinách.

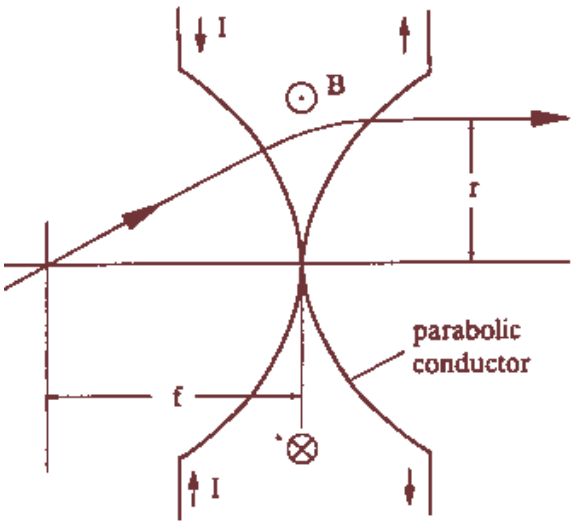
4.1.1 Multipóly - profily pole a pólů

Jak vyrobit kvadrupól nebo jiný magnet? U klasických magnetů je požadovaného průběhu pole dosaženo pomocí vhodného tvaru povrchu železa (materiálu s magnetickou permeabilitou blížící se nekonečnu). Tento tvar definuje ekvipotenciály, tj. získáme-li podmínku pro konstantní skalární potenciál, víme, jaký tvar pólových nástavců je nutno použít. V dalším textu si probereme některé tvary. Přitom nebudeme uvažovat žádnou závislost na podélné souřadnici s. Budeme tedy získávat průřezy magnetů

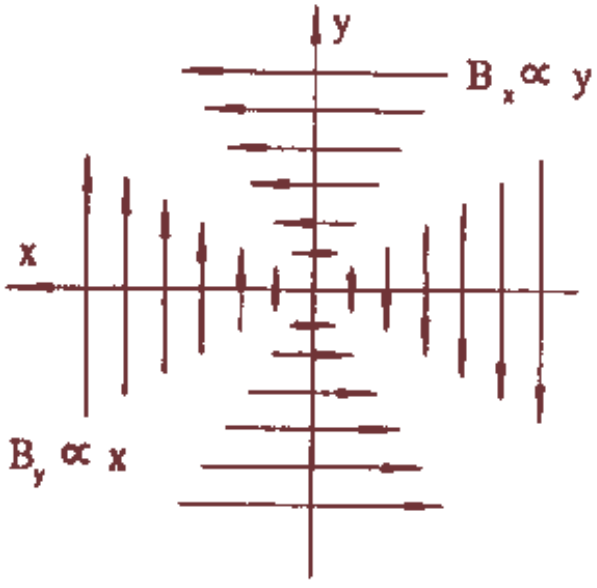
Vodorovně odchylující dipól ($\rho = \text{const}$) Konstatní poloměr ohybu nastává v konstatním magnetickém poli. Platí tedy

$$B_y(x, y) = \frac{p}{e\rho} = \text{const} \tag{4.14}$$

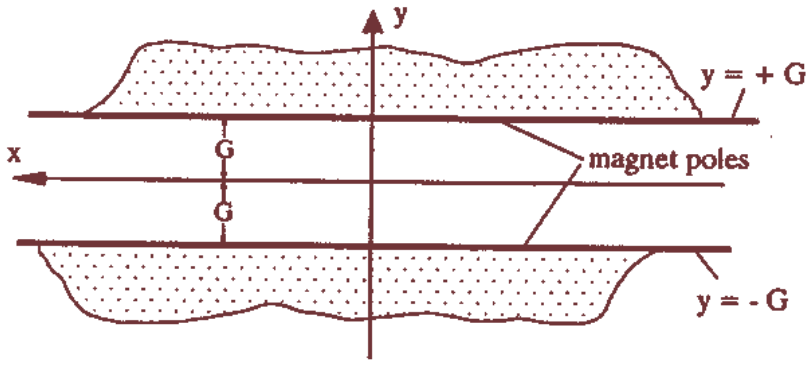
$$B_x = 0 \tag{4.15}$$



Obrázek 4.2: Průřez parabolickou proudovou čočkou



Obrázek 4.3: Orientace magnetické indukce v poli kvadrupólu



Obrázek 4.4: Průřez nástavci vodorovně vychylujícího dipólu

Skalární potenciál získáme ze vztahů pro jednotlivé složky magnetické indukce

$$B_x = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{4.16}$$

$$B_y = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.17}$$

$$V = \int B_y \mathrm{d}y = \mathrm{const} \quad y \tag{4.18}$$

Tento potenciál vyhovuje i 4.15. Pro ekvipotenciálu platí (viz obrázek 4.4)

$$y = \mathrm{const} \tag{4.19}$$

Tento vztah musí platit pro všechny hodnoty x, a určíme podle něj požadovaný tvar dipólu: $y = \pm G$. Podobně je to pro svisle vychylující dipól.

Kvadrupól

Pro kvadrupólový magnet platí (viz 4.11), že $xy = \mathrm{const}$

Řešením této rovnice je hyperbola (viz obrázek 4.5). Poloměr kružnice vepsané je R, takže platí

$$xy = \pm\frac{1}{2}R^2 \tag{4.20}$$

a pro pootočený kvadrupól:

$$x^2 - y^2 = \pm R^2 \tag{4.21}$$

Kvadrupól má tedy 4 póly, na kterých je stejné magnetické pole, jen se střídavým znaménkem.

Často se konstruuje magnet, který v sobě kombinuje oba typy - dipól i kvadrupól. Nazývá se *synchrotronový magnet*. Jde ve skutečnosti o kvadrupól vysunutý do strany o x_0. Jeho pole je pak:

$$\frac{e}{p}B_y = k(x - x_0) \tag{4.22}$$

Částice s $x = 0$ letí po poloměru $1/\rho = kx_0$ Současně se svazek po průchodu tímto magnetem zfokusuje vodorovnou komponentou (úměrně fokusační schopnosti k)

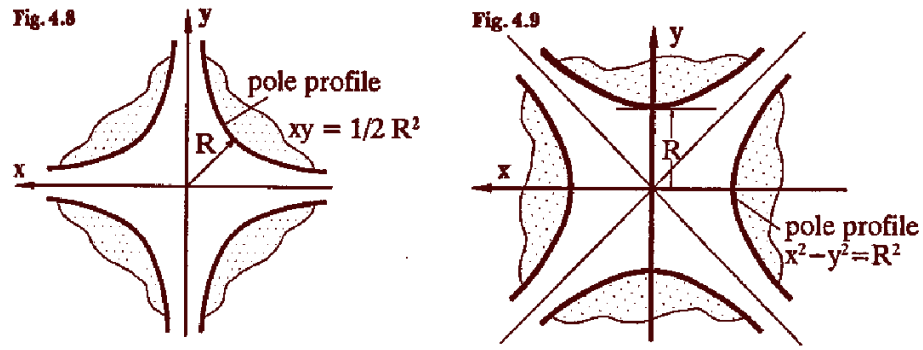
Pro tento typ magnetu je definována tzv. charakteristická délka

$$l_{ch} = \frac{1}{\rho_0 k} \tag{4.23}$$

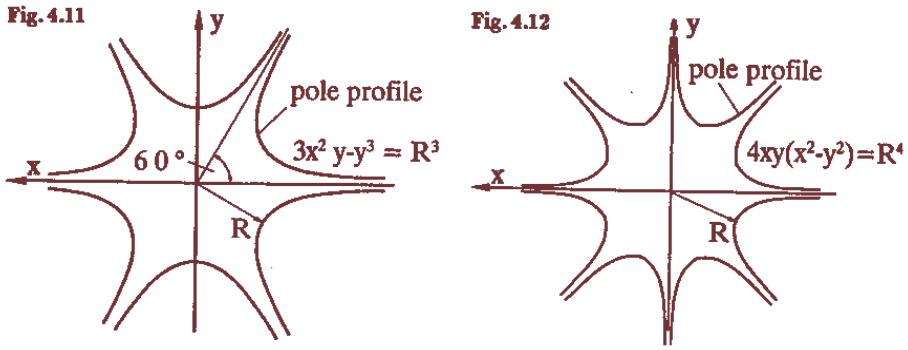
Zkuste ukázat, že

$$l_{ch} = -x_0 \tag{4.24}$$

Kromě kvadrupólů se dále používají sextupóly a zřídka i oktupóly. Jejich průřezy jsou na obrázku 4.6. Slouží zejména k opravám chromatických odchylek (fokusace částic s různou hybností).



Obrázek 4.5: Tvary pólových nástavců kvadrupólů: vlevo přímý, vpravo pootočený



Obrázek 4.6: Tvary pólových nástavců přímého sextupólu a oktupólu

4.1.2 Pohybové rovnice

Budeme pracovat v tzv. lineární (první) aproximaci. Rovnice pro magnetické pole jsou:

$$B_x = gy \tag{4.25}$$
$$B_y = B_{y0} + gx \tag{4.26}$$

kde B_y0 je pole dipólu a g je gradient pole kvadrupólu. Pohybové rovnice pak jsou

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho_0^2} + k_0\right) x = 0 \tag{4.27}$$
$$y'' - k_0 y = 0 \tag{4.28}$$

Fokusační schopnosti obou magnetů popisuje fokusační parametr

$$K(s) = \frac{1}{\rho_0^2(s)} + k_0(s) \tag{4.29}$$

Pro separované magnety použijeme buď $\rho_0 \to \infty$ nebo $k_0 = 0$.

Pro kratší úseky pole můžeme nahradit K skokovou funkcí $K = \text{const}$ a pak dostáváme

$$u'' + Ku = 0 \tag{4.30}$$

Pro popis průchodu svazku magnety se obvykle používá maticový zápis

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(s) \\ u_0'(s) \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

4.2 Betatronové funkce

Formalismus popsaný v předchozí části spočívá v nalezení transformační matice odpovídající každému prvku po trase urychlovaných částic a přesném výpočtu výsledného stavu částice. To se provádí pomocí specializovaných programů na počítačích. Analytické řešení, vzhledem ke složitosti systému, nelze v praxi nalézt. Pro řešení některých úloh by nám však stačilo alespoň přibližné analytické řešení, které by nám dávalo představu o chování trajektorií částic. Pokusme se tedy takové řešení nalézt. Budeme řešit rovnici

$$u'' + k(s)u = 0 \tag{4.32}$$

Funkce $k(s)$ popisuje rozložení magnetů podél dráhy. Navrhneme obecné řešení ve tvaru (variace konstanty):

$$u(s) = \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) - \psi_0] \tag{4.33}$$

kde $\sqrt{\epsilon}$ a ψ_0 jsou integrační konstanty. Zjednodušeně si označíme $\beta = \beta(s)$ a $\psi = \psi(s)$ a spočítáme první a druhou derivaci

$$u' = \sqrt{\epsilon}\frac{\beta'}{2\sqrt{\beta}}\cos(\psi - \psi_0) - \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta}\sin(\psi - \psi_0)\psi' \tag{4.34}$$
$$u'' = \sqrt{\epsilon}\frac{\beta\beta'' - 1/2\beta'^2}{2\beta^{3/2}}\cos(\psi - \psi_0) - \sqrt{\epsilon}\frac{\beta'}{\sqrt{\beta}}\sin(\psi - \psi_0)\psi' \tag{4.35}$$
$$-\sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta}\sin(\psi - \psi_0)\psi'' - \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta}\cos(\psi - \psi_0)\psi'^2 \tag{4.36}$$

Po dosazení do diferenciální rovnice 4.32 oddělíme členy při sinu i kosinu. Jejich součet musí být nulový, abychom získali řešení platné pro všechny fáze ψ. Odtud získáme 2 podmínky

$$1/2(\beta\beta'' - 1/2\beta'^2) - \beta^2\psi'^2 + \beta^2 k = 0 \tag{4.37}$$

a

$$\beta'\psi' + \beta\psi'' = 0 \tag{4.38}$$

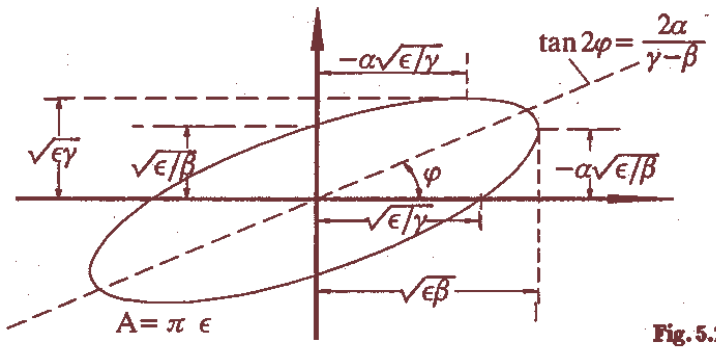


Fig. 5.22. P

Obrázek 4.7: Elipsa ve fázovém prostoru

Předchozí rovnici můžeme zintegrovat okamžitě, protože $\beta'\psi' + \beta\psi'' = (\beta\psi')'$, tj.:

$$\beta\psi' = \text{const} = 1 \tag{4.39}$$

Hodnota konstanty 1 bude naše zvolená normalizace. Fázová funkce pak bude

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\beta(\bar{s})} + \psi_0 \tag{4.40}$$

Jaké vlastnosti musí splňovat řešení 4.37? Jak už bylo řečeno, musí platit pro všechny fáze ψ. Zkusme tedy z předpisu pro funkci $u(s)$ a její derivaci eliminovat $\psi - \psi_0$

$$u(s) = \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta}\cos(\psi - \psi_0) \tag{4.41}$$

$$u'(s) = -\sqrt{\epsilon}\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\cos(\psi - \psi_0) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\beta}}\sin(\psi - \psi_0) \tag{4.42}$$

Zavedeme si proměnné $\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$ a $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$. Z předchozích rovnic vyplývá, že musí platit

$$\gamma u^2 + 2\alpha u u' + \beta u'^2 = \epsilon \tag{4.43}$$

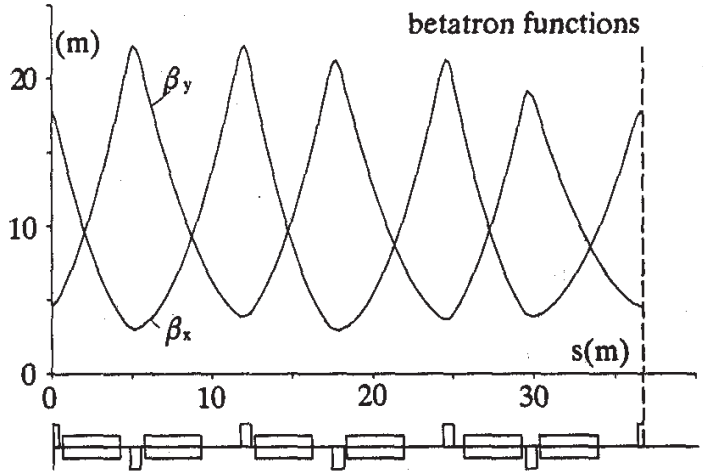
Tento výraz se tedy v průběhu urychlování nemění a nazývá se *Courant-Snyderův invariant* a má velký význam pro popis betatronových kmitů.

Z jeho tvaru je patrné, že jde o rovnici elipsy ve fázovém prostoru (v rovině u a u') s parametry α,β a γ a plochou ϵ. Tato elipsa je znázorněna na obrázku 4.7 Elipsa má však pouze 3 nezávislé parametry: to však neodporuje našim poznatkům - parametr γ byl zde také stanoven pomocí zbylých parametrů. Funkce β, α, γ a fázovou funkci ψ nazýváme *betatronovými funkcemi.*

Jaká je interpretace tohoto zjištění? Částice se během urychlování pohybují po fázových elipsách ve fázovém prostoru. Tyto elipsy mění tvar během urychlování, ale jejich plocha zůstává konstantní. Velikost svazku v obou příčných rozměrech, a jeho směr se periodicky mění (viz obr. 4.8).

Plochu elipsy jsme si označili ϵ, což je stejný symbol, který jsme dříve používali pro emitanci. Ve skutečnosti se ale plocha elipsy rovná emitanci svazku jen v případě, že jde o částice "na povrchu svazku", nebo na jeho obálce. Pro všechny ostatní částice uvnitř svazku budeme místo emitance používat symbol $a = \sqrt{\epsilon}$. Samotný pojem *obálka (envelope)* se pak používá pro výraz

$$E(s) = \pm\sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta(s)} \tag{4.44}$$



Obrázek 4.8: Průběh betatronových funkcí pro synchrotron [1]

Kapitola 5

Podélný pohyb částic

Při urychlování částic ve vlnovodech generujeme podélné vysokofrekvenční pole

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E_0} e^{i(\omega t - kz)} = \boldsymbol{E_0} e^{i\psi} \tag{5.1}$$

Změna hybnosti způsobená tímto polem je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{E}(\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc\gamma\beta) \tag{5.2}$$

Celkový přírůstek energie v jedné urychlovací buňce je

$$\Delta E = (\gamma - \gamma_0)mc^2 = e\int \boldsymbol{E}(\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{5.3}$$

5.1 Podmínka synchronnosti

Definujme si *synchronní fázi*

$$\psi_s = \omega t - kz = \mathrm{const} \tag{5.4}$$

Podmínka synchronnosti je vyjádřena pomocí časové derivace fáze

$$\dot{\psi_s} = \omega - k\beta c = 0 \tag{5.5}$$

Tato podmínka platí pro vlnovou délku shodnou s délkou urychlovací sekce, takže $k = 2\pi/L$ a

$$\omega_1 = k_1\beta c = \frac{2\pi}{L}\beta c = \frac{2\pi}{\Delta T} \tag{5.6}$$

ω_1 je nejnižší frekvence, splňující podmínku synchronnosti. Tato podmínka je však splněna i pro celočíselné násobky základní frekvence

$$\omega_h = \frac{2\pi}{\Delta T}h \tag{5.7}$$

kde h je harmonické číslo.

Dosud jsme předpokládali, že β i k jsou konstantní. To ovšem není splněno pro svazek s různými hybnostmi. Rozptyl v rychlosti je pochopitelný, avšak částice se liší i pokud jde o dráhu - tvar dráhy, a tudíž i délka, v kruhových urychlovačích závisí na hybnosti. Musíme tedy modifikovat podmínku synchronnosti. Variace fáze pro $k \neq \mathrm{const}$ bude

$$\Delta\dot{\psi} = -\Delta(k\beta c) = -ck\Delta\beta - \beta c\Delta k = -ck\Delta\beta - \beta c\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}\Delta t \tag{5.8}$$

k se mění s hybností díky změněné dráze, takže

$$\left.\frac{\partial k}{\partial p}\right|_0 = \frac{\partial k}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p} \tag{5.9}$$

a po dosazení

$$\left.\frac{\partial k}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_0 = -\left.\frac{k_h}{L_0}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_0 = -\frac{k_h}{p_0}\alpha_c \tag{5.10}$$

kde α_c je tzv. *momentum compaction factor* definovaný

$$\alpha_c = \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p_0} \tag{5.11}$$

Pokud uvažujeme jen horizontální výchylky od rovnovážné polohy (pro vertikální výchylky budou platit prakticky shodné vztahy), pro dráhu platí

$$L = \int_0^{L_0} (1 + \kappa_x x)\mathrm{d}z \tag{5.12}$$

Příčnou polohu si můžeme rozepsat

$$x = x_\beta + \eta\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right) \tag{5.13}$$

kde x_β je výchylka způsobená betatronovými kmity a $\eta\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)$ vyjadřuje změnu poloměru ohybu způsobenou hybností odlišnou od nominální hodnoty.

Po integraci (pomocí středních hodnot)

$$L = L_0 + < \kappa_x x_\beta > L_0 + < \kappa_x \eta > \frac{\Delta p}{p_0} L_0 \tag{5.14}$$

Z charakteru betatronových kmitů je zřejmé, že $< \kappa_x x_\beta >= 0$ a

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} =< \kappa_x \eta > \frac{\Delta p}{p_0} = \left\langle \frac{\eta}{\rho} \right\rangle \frac{\Delta p}{p_0} \tag{5.15}$$

Odtud pro α_c máme

$$\alpha_c = \left\langle \frac{\eta}{\rho} \right\rangle \tag{5.16}$$

Z předchozího vztahu plyne, že pro přímé sekce ($\rho \to \infty$) je $\alpha_c = 0$. To je logické, neboť pro lineární sekce délka dráhy nezávisí na hybnosti.

V dalším odvozování použijeme vztahy

$$\frac{\partial p}{\partial t}\Delta t = \Delta p \tag{5.17}$$

$$mc\gamma^3 \Delta\beta = \Delta p \tag{5.18}$$

a po úpravách

$$\dot{\psi} = -\beta c k_h \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c\right)\frac{\Delta p}{p_0} \tag{5.19}$$

Člen $\frac{1}{\gamma^2}$ vyjadřuje změnu rychlosti částice s energií. V popisu lineárních urychlovačů tento člen zůstává (na rozdíl od α_c) protože doba letu se v nerelativistické oblasti s energií mění.

Kombinace obou členů se nazývá *momentum compaction*

$$\eta_c = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c\right) \tag{5.20}$$

Derivací rovnice(5.19) dostaneme

$$\ddot{\psi} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\beta c k_h \eta_c \frac{\Delta p}{p_0}\right) = 0 \tag{5.21}$$

Analýzou výrazu v závorce zjistíme, že většina členů, jako např. β, se mění velice pomalu ve srovnání s fází, takže můžeme aproximovat

$$\ddot{\psi} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{c p_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta cp = 0 \tag{5.22}$$

Tento výraz je pohybovou rovnicí ve vysokofrekvenčním potenciálu. Změnu hybnosti si vypočítáme ze změny energie.

Přírůstek energie v urychlovací sekci je

$$\Delta E = e \int_L e\boldsymbol{E}(\psi) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = eV(\psi) \tag{5.23}$$

kde $V(\psi)$ je celkové urychlující napětí na dráze L.

Částice s ideální energií a drahou získá energii $eV(\psi_s)$ kde ψ_s je synchronní fáze. V dalším odvozování předpokládáme sinusový průběh urychlovacího napětí

$$V(\psi) = \hat{V}_0 \sin \psi \tag{5.24}$$

a budeme se zajímat o kmity částice okolo synchronní fáze, tj. zavedeme relativní fázi

$$\varphi = \psi - \psi_s \tag{5.25}$$

Pak

$$V(\psi_s + \varphi) = \hat{V}_0 (\sin \psi_s \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi_s) \tag{5.26}$$

V pohybové rovnici si nahradíme $\beta \Delta cp = \Delta E$ a $\ddot{\psi} = \ddot{\varphi}$ a dostaneme

$$\ddot{\varphi} + \frac{c k_h \eta_c}{c p_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta E = 0 \tag{5.27}$$

Přírůstek ΔE si rozložíme do Taylorovy řady okolo nulové hodnoty φ

$$\Delta E = e \Big[V(0) + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\Big|_0 \varphi \Big] = e\hat{V}_0 [\sin \psi_S + \cos \psi_s \cdot \varphi] \tag{5.28}$$

První člen je konstantní, takže po derivaci podle času zbude pouze člen druhý. Tuto pohybovou rovnici budeme řešit pouze přibližně, abychom získali představu o povaze podélného pohybu částice. Proto si časovou derivaci přírůstku energie nahradíme jeho střední hodnotou během průletu částice rezonátorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta E \approx \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{1}{T_0} e\hat{V}_0 \cos \psi_s \cdot \varphi \tag{5.29}$$

Pohybová rovnice tedy bude

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = 0 \tag{5.30}$$

kde Ω je *frekvence synchrotronových kmitů*, pro niž platí

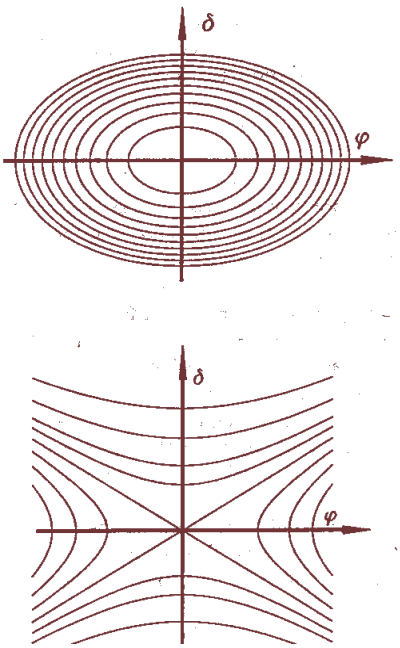
$$\Omega^2 = \frac{c k_h \eta_c}{c p_0 T_0} e\hat{V}_0 \cos \psi_s \tag{5.31}$$

Částice tedy kmitá okolo rovnovážné fáze s úhlovou frekvencí Ω. Podobně jako u betatronových kmitů si zavádíme *synchrotron tune (ladění)*, definované jako počet synchrotronových kmitů na jeden oběh částice

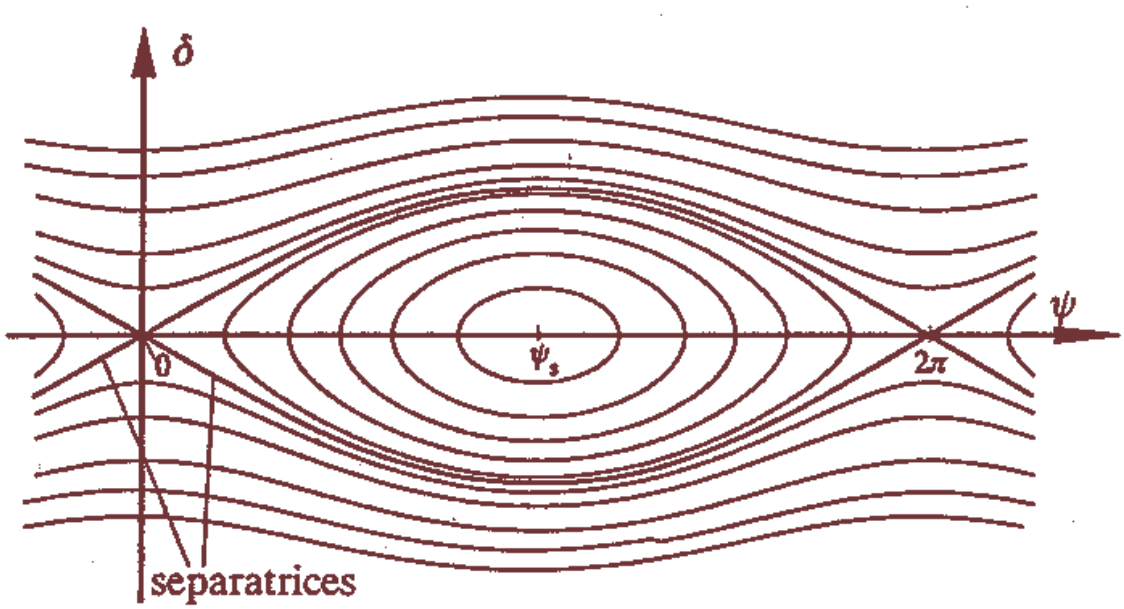
$$\nu_s = Q_s = \frac{\Omega}{\omega_{rev}} \tag{5.32}$$

Trajektorie částic vykonávajících synchrotronové kmity jsou znázorněny na obrázku 5.1, a to ve fázovém prostoru (φ,δ). Relativní odchylka hybnosti δ je definována

$$\delta = \frac{\Delta cp}{c p_0} \tag{5.33}$$



Obrázek 5.1: Synchrotronové kmity ve fázovém prostoru stabilní (nahoře) a nestabilní (dole)



Obrázek 5.2: Trajektorie synchrotronových kmitů urychlovaného systému

Na obrázku 5.1 vidíme, že synchrotronové kmity okolo rovnovážné polohy mohou být stabilní, ale i nestabilní.

Dosavadní výpočty předpokládaly některá přiblížení. Uvažovali jsme například pouze malé výchylky okolo rovnovážné polohy, nulovou fázi částice, ap. V případě větších výchylek a skutečného urychlujícího pole (výchylka v tomto případě nesmí být nulová) se však situace mění. Exaktnějšími výpočty lze dospět k výsledkům i v toto případě. Zde uvedeme jen tvar trajektorií kmitů ve fázovém prostoru - viz obrázek 5.2. Zde si můžeme povšimnout toho, že částice jejichž odchylky od rovnovážné polohy jsou příliš velké opouštějí jeden shluk částic, a ocitají se ve fázi s předchozím nebo následujícím shlukem. Trajektorie, která odděluje stabilní a nestabilní dráhy se nazývá *separatrix*, a je také vidět na obrázku.

5.2 Fázová stabilita

Abychom dostali stabilní řešení pohybové rovnice, musí být frekvence Ω reálná, tj. pravá strana vztahu(5.31) musí být kladná. Všechny parametry jsou kladné, až na η_c a fázový faktor $\cos\psi_s$. Pro nízké energie je η_c kladné, protože $\gamma^{-2} > \alpha_c$, ale pro jistou energii dochází ke změně znaménka. Tato energie se nazývá *energie přechodu (transition energy)*

$$\gamma_{tr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}} \tag{5.34}$$

Pro elektrony je tato energie řádově několik MeV, pro protony je několik GeV.

Injektory všech elektronových rezonančních urychlovačů předurychlí elektrony nad energii přechodu, takže přechod v kruhových urychlovačích elektronů nenastává. Ovšem u protonů nastává tento přechod až v průběhu urychlování v hlavním urychlovači a bývá technickým problémem. Co prakticky znamená přechod? Fáze urychlovacího napětí ψ_s se musí skokem změnit na jinou hodnotu - hodnota jejího kosinu musí změnit znaménko. Musí tedy platit:

$$0 < \psi_s < \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad \gamma < \gamma_{tr} \tag{5.35}$$

$$\frac{\pi}{2} < \psi_s < \pi \quad \text{pro} \quad \gamma > \gamma_{tr} \tag{5.36}$$

Toto jsou podmínky *fázové stability* v kruhových urychlovačích. Předchozí rovnice nám totiž současně ukazují, že při splnění těchto podmínek opravdu existuje oblast fázové stability.

Literatura

[1] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics, Springer Berlin, 1993

[2] E. Wilson, An Introduction to Particle Accelerators, Oxford University Press, 2001